

ارزش اختیار معامله اروپایی رنگین کمانی دو سهامه تحت مدل پخش پرش مرتون

نوع مقاله:

پژوهشی اصیل

مشخصات نویسندگان:

۱. آرمین یزدانی*: کارشناسی ارشد، ریاضی آنالیز عددی- مالی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

* پست الکترونیکی نویسنده مسئول: Armin_yazdani@mizan.ac.ir

تاریخ ارسال: ۱۴۰۴/۱۰/۲۲

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۱۱/۲۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۲/۲۸

تاریخ چاپ: ۱۴۰۵/۰۳/۳۱

شیوه استناددهی: یردانی، آرمین. (۱۴۰۵). ارزش اختیار معامله اروپایی رنگین کمانی دو سهامه تحت مدل پخش پرش مرتون. حکمرانی و شهر هوشمند، ۲(۱)، ۲۰-۱.

© ۱۴۰۵ تمامی حقوق انتشار این مقاله متعلق به نویسنده است. انتشار این مقاله به صورت دسترسی آزاد مطابق با گواهی [CC BY-NC 4.0](#) صورت گرفته است.

چکیده

این پژوهش به ارزش گذاری اختیار معامله اروپایی رنگین کمانی دو سهامه در چارچوب مدل پخش-پرش مرتون می پردازد. اختیارهای رنگین کمانی از جمله مشتقات چنددارایی اند که ارزش آنها به رفتار مشترک دو دارایی پایه وابسته است و از این رو، در محیط های مالی پیچیده و دارای عدم قطعیت، ابزار مناسبی برای سنجش و مدیریت ریسک به شمار می آیند. با توجه به اینکه مدل های کلاسیک مبتنی بر نوسانات پیوسته، جهش های ناگهانی و شوک های ساختاری قیمت را به خوبی منعکس نمی کنند، در این مطالعه از مدل مرتون برای لحاظ کردن پرش های قیمتی استفاده شد. بر این اساس، فرمول های شبه بسته برای اختیارهای مبتنی بر کمینه و بیشینه دو دارایی هم بسته استخراج گردید. همچنین برای تحلیل عددی، ارزیابی دقت فرمول ها و محاسبه حساسیت ها (یونانی ها)، از روش تفاضلات متناهی و شبیه سازی مونت کارلو بهره گرفته شد. نتایج عددی نشان داد که فرمول های پیشنهادی از همگرایی مطلوب و دقت بالایی برخوردارند و با روش های عددی پیچیده تر سازگاری مناسبی دارند. افزون بر این، نوسان پذیری، هم بستگی میان دارایی ها و شدت وقوع پرش، اثر معنادار و تعیین کننده ای بر ارزش اختیار معامله دارند. در مجموع، یافته های پژوهش نشان می دهد که مدل پخش-پرش مرتون می تواند چارچوبی کارآمد و واقع گرایانه برای قیمت گذاری مشتقات چنددارایی و تحلیل ریسک در محیط های مالی ناپایدار فراهم آورد. این چارچوب، به ویژه برای تصمیم سازی مبتنی بر داده و مدیریت ریسک در پروژه های پیچیده و چندمنبعی، قابلیت کاربرد بالایی دارد.

واژگان کلیدی: اختیار معامله رنگین کمانی، مدل پخش-پرش مرتون، حکمرانی شهر هوشمند، روش تفاضلات متناهی، مدیریت ریسک، مشتقات مالی چنددارایی.

Valuation of European Two-Asset Rainbow Options under the Merton Jump-Diffusion Model

Article Type:
Original Research

Submit Date: 2026/01/12
Revise Date: 2026/02/10
Accept Date: 2026/03/19
Publish Date: 2026/06/21



© 2026 the authors. This is an open access article under the terms of the [CC BY-NC 4.0 License](#).

Authors' Information:

1. Armin Yazdani*: M.Sc. Numerical Analysis and Financial Mathematics, University of Tabriz, Tabriz, Iran

* Corresponding author's email: Armin_yazdani@mizan.ac.ir

How to cite this article: Yazdani, A. (2026). Valuation of European Two-Asset Rainbow Options under the Merton Jump-Diffusion Model. *Governance and Smart City*, 2(1), 1-20.

Abstract

This study addresses the valuation of a two-asset European rainbow option within the framework of Merton's jump-diffusion model. Rainbow options are among multi-asset derivatives whose value depends on the joint behavior of two underlying assets; therefore, in complex and uncertain financial environments, they are regarded as appropriate instruments for measuring and managing risk. Given that classical models based on continuous fluctuations do not adequately reflect sudden jumps and structural price shocks, Merton's model was employed in this study to incorporate price jumps. On this basis, quasi-closed-form formulas were derived for options written on the minimum and maximum of two correlated assets. In addition, the finite difference method and Monte Carlo simulation were used for numerical analysis, evaluation of the formulas' accuracy, and computation of sensitivities (the Greeks). The numerical results showed that the proposed formulas possess desirable convergence and high accuracy, and exhibit suitable consistency with more complex numerical methods. Moreover, volatility, the correlation between the assets, and the intensity of jump occurrence have a significant and decisive effect on option value. Overall, the research findings indicate that Merton's jump-diffusion model can provide an efficient and realistic framework for pricing multi-asset derivatives and analyzing risk in unstable financial environments. This framework is especially highly applicable to data-driven decision-making and risk management in complex, multi-source projects.

Keywords: *Rainbow Option, Merton Jump-Diffusion Model, Smart City Governance, Finite Difference Method, Risk Management, Multi-Asset Derivatives.*

شهرهای امروز، به‌ویژه در بستر تحولات فناوریانه، دیگر تنها مجموعه‌ای از زیرساخت‌های فیزیکی و خدمات عمومی نیستند، بلکه به سامانه‌هایی پیچیده، پویا و به‌شدت به هم‌پیوسته تبدیل شده‌اند که در آن‌ها اطلاعات، انرژی، سرمایه و تصمیم‌گیری در زمان واقعی جریان دارد. (Batty et al., 2012; Kitchin, 2014; et al.) در چنین بستری، مفهوم شهر هوشمند تنها به استفاده از فناوری‌های نوین در حمل‌ونقل، انرژی، سلامت یا خدمات الکترونیک محدود نمی‌شود، بلکه مستلزم شکل‌گیری نوعی حکمرانی هوشمند است؛ حکمرانی‌ای که بتواند عدم قطعیت‌ها را شناسایی، ریسک‌ها را مدیریت، و منابع محدود شهری را به‌صورت کارآمد تخصیص دهد (Meijer & Bolivar, 2016; Nam & Pardo, 2011). از این منظر، یکی از پیش‌نیازهای حکمرانی شهر هوشمند، برخورداری از ابزارهای تحلیلی و مالی مناسب برای مواجهه با ریسک‌های پیچیده و چندبعدی است. با این حال، با وجود گستردگی ابعاد فیزیکی و فناوریانه در پژوهش‌های شهری، ابعاد مالی و تحلیل‌های سنجش ریسک‌های چندگانه در هسته حکمرانی مالی شهرهای هوشمند همچنان مغفول مانده و سازوکارهای سنتی فاقد پویایی لازم برای همگامی با پیچیدگی‌های این سامانه‌ها هستند؛ امری که ضرورت بازنگری در ابزارهای پشتیبان تصمیم را دوچندان می‌سازد. در اقتصاد شهری و مدیریت هوشمند، تصمیم‌گیران با طیف وسیعی از عدم اطمینان‌ها مواجه‌اند؛ از نوسانات قیمت انرژی و مواد اولیه گرفته تا تغییرات تقاضا، شوک‌های زنجیره تأمین، ریسک‌های اقلیمی، نوسانات بازارهای مالی و حتی ریسک‌های ناشی از سرمایه‌گذاری در پروژه‌های زیرساختی (Angelidou, 2015; Albino et al., 2015). شهرها برای توسعه پایدار و هوشمند، ناگزیرند سرمایه‌گذاری‌های سنگینی در حوزه‌هایی مانند حمل‌ونقل عمومی، شبکه‌های انرژی پاک، ساختمان‌های هوشمند، زیرساخت داده، و سامانه‌های دیجیتال انجام دهند. این سرمایه‌گذاری‌ها معمولاً با افق زمانی بلندمدت و بازدهی نامطمئن همراه‌اند. بنابراین، وجود ابزارهایی که بتوانند ریسک را کمی‌سازی و کنترل کنند، برای تصمیم‌سازی در حکمرانی شهری اهمیت بنیادین دارد.

(Caragliu et al., 2011; OECD, 2019). فقدان یک ابزار کمی دقیق برای پیش‌بینی و کنترل نوسانات، به طور مستقیم به ناکارآمدی در تخصیص منابع و افزایش نرخ شکست پروژه‌های کلان شهری منجر می‌شود، چرا که تصمیم‌گیران در نبود مدل‌های پویای ارزیابی ریسک، ناگزیر به تکیه بر تحلیل‌های ایستا و غیراستوار خواهند بود. در این میان، ابزارهای مشتقه مالی، به‌ویژه اختیار معامله، جایگاه ویژه‌ای در مدیریت ریسک دارند. اختیار معامله به سرمایه‌گذاران و نهادهای تصمیم‌گیر امکان می‌دهد تا در برابر نوسانات نامطلوب قیمت‌ها از خود محافظت کنند و در عین حال از فرصت‌های سودآور بازار بهره ببرند (Hull, 2022). در شهر هوشمند نیز که تصمیمات اقتصادی و سرمایه‌گذاری اغلب در محیطی غیرقطعی اتخاذ می‌شوند، چنین ابزارهایی می‌توانند نقش پشتیبان برای سیاست‌گذاری، تأمین مالی پروژه‌ها، و کنترل ریسک‌های مالی ایفا کنند. (Bibri & Krogstie, 2017; Meijer & Bolivar, 2016). برای مثال، در پروژه‌های بزرگ شهری که وابسته به چند متغیر قیمتی هستند، طراحی ابزارهای مشتقه مناسب می‌تواند به کاهش عدم اطمینان و افزایش جذابیت سرمایه‌گذاری کمک کند. از این منظر، توسعه مدل‌های دقیق ارزش‌گذاری اختیار معامله نه فقط یک مسئله صرفاً مالی، بلکه بخشی از زیرساخت تحلیلی لازم برای



حکمرانی مالی در شهر هوشمند به شمار می‌آید (Janssen et al., 2020). بدون وجود مدل‌های ریاضی مستحکم جهت ارزش‌گذاری این ابزارها، سیاست‌گذاران شهری عملاً قادر به پوشش بهینه ریسک‌های سرمایه‌گذاری نبوده و ظرفیت مشارکت بخش خصوصی در زیرساخت‌های هوشمند به دلیل عدم امنیت مالی به شدت کاهش می‌یابد.

از سوی دیگر، بسیاری از دارایی‌های پایه در اقتصاد نوین شهری با رفتارهای قیمتی پیچیده و گاه غیرخطی مواجه‌اند. کالاهای مرتبط با انرژی، فلزات، خدمات فناوری و حتی شاخص‌های چنددارایی، غالباً تحت تأثیر جهش‌های ناگهانی و شوک‌های ساختاری قرار می‌گیرند (Cont & Tankov, 2004; Merton, 1976). مدل‌های کلاسیک مبتنی بر حرکت هندسی براونی، اگرچه مبنای مهمی در ادبیات مالی محسوب می‌شوند (Black & Scholes, 1973)، اما در بسیاری از موارد قادر به بازنمایی کامل واقعیت‌های بازار نیستند؛ زیرا در آن‌ها جهش‌های ناگهانی قیمت، رخداد‌های حدی، و نوسانات شدید به‌درستی منعکس نمی‌شود (Merton, 1976; Kou, 2002) به همین دلیل، استفاده از مدل‌های پخش-پرش، به‌ویژه مدل مرتون، امکان واقع‌گرایانه‌تری برای توصیف رفتار دارایی‌ها فراهم می‌کند. این مدل‌ها به‌دلیل توانایی در لحاظ کردن پرش‌های قیمتی، برای محیط‌هایی که با عدم قطعیت بالا و شوک‌های ساختاری مواجه‌اند، مناسب‌ترند.

(Ait-Sahalia & Jacod, 2014; Cont & Tankov, 2004) محیط‌هایی که بسیاری از آن‌ها را می‌توان در ساختار اقتصادی شهرهای هوشمند مشاهده کرد. شکاف اساسی پژوهش‌های پیشین در این است که اغلب مدل‌های به کار رفته در حوزه مالی شهری، وقوع جهش‌های ناگهانی ناشی از تغییر سیاست‌ها، بحران‌های اقتصادی و تحولات فناورانه را نادیده گرفته‌اند؛ رویکردی ساده‌انگارانه که ریسک واقعی را به شدت دست‌کم می‌گیرد و به شکست برنامه‌ریزی‌های کلان می‌انجامد. افزون بر این، در دنیای امروز تصمیم‌گیری‌ها به‌ندرت بر پایه یک متغیر منفرد انجام می‌شود. حکمرانی شهر هوشمند نیز ذاتاً چندمعیاره است و مدیران شهری ناچارند میان چندین شاخص و منبع داده به‌طور هم‌زمان تعادل برقرار کنند (Bibri & Krogstie, 2017; Meijer & Bolívar, 2016). از همین‌رو، ابزارهای مالی چنددارایی و چندشاخصی، از جمله اختیارهای رنگین‌کمانی، اهمیت ویژه‌ای می‌یابند. اختیار معامله رنگین‌کمانی دو سهامه، به‌عنوان یکی از ابزارهای مشتقه پیچیده، امکان ارزش‌گذاری بر اساس رفتار توأمان دو دارایی را فراهم می‌سازد و می‌تواند در تحلیل‌های مرتبط با ریسک سبدهای سرمایه‌گذاری، پروژه‌های زیرساختی و یادارایی‌های وابسته به دومنبع درآمدی یا هزینه‌ای مورد استفاده قرار گیرد. (Johnson, 1987; Rubinstein, 1991; Stulz, 1982) این ویژگی با منطق حکمرانی شهر هوشمند همسو است؛ زیرا در شهر هوشمند، تصمیم‌ها اغلب تابع هم‌زمان چند متغیر هستند و ارزیابی آن‌ها نیازمند مدل‌هایی است که وابستگی‌ها و همبستگی‌ها را به‌درستی در نظر بگیرند. عدم توسعه مدل‌های ارزش‌گذاری چنددارایی که به‌طور هم‌زمان جهش‌های قیمتی را پوشش دهند، مانع از ارزیابی واقع‌گرایانه کلان‌پروژه‌های شهری شده است؛ پروژه‌هایی که معمولاً ماهیت تک‌متغیره ندارند و وابستگی متقابل دارایی‌ها در آن‌ها تعیین‌کننده نهایی سود و زیان است.

در واقع، شهر هوشمند تنها زمانی می‌تواند به‌سوی پایداری و کارآمدی حرکت کند که حکمرانی آن قادر باشد ریسک را نه صرفاً به‌عنوان تهدید، بلکه به‌عنوان پدیده‌ای قابل مدیریت و قابل قیمت‌گذاری ببیند (OECD, 2019; Kitchin, 2014). ارزش‌گذاری دقیق ابزارهای مشتقه، از جمله اختیارهای چنددارایی، می‌تواند به شفافیت بیشتر در تصمیمات مالی، بهبود تخصیص منابع، و افزایش توان تاب‌آوری سیستم شهری در



برابر شوک‌های اقتصادی کمک کند (Meijer & Bolívar, 2016; Janssen et al., 2020) چنین رویکردی، زمینه را برای پیوند میان اقتصاد مالی پیشرفته و حکمرانی شهر هوشمند فراهم می‌سازد؛ پیوندی که در آن تحلیل کمی و ابزارهای ریاضی به خدمت تصمیم‌سازی در محیط‌های پیچیده شهری درمی‌آیند. در این میان، بازار بورس و ابزارهای مالی مرتبط با آن، نقش کلیدی در تسهیل جریان سرمایه و پوشش ریسک‌های ناشی از پروژه‌های شهر هوشمند ایفا می‌کنند. بسیاری از زیرساخت‌های شهری که امروزه در قالب پروژه‌های هوشمند تعریف می‌شوند، نیازمند مدل‌های تأمین مالی نوآورانه هستند که از طریق ابزارهای پذیرفته‌شده در بورس (مانند اوراق مشتقه) امکان‌پذیر است. بورس نه تنها به عنوان بستری برای نقدشوندگی دارایی‌های زیرساختی عمل می‌کند، بلکه با انعکاس انتظارات بازار در قیمت دارایی‌ها، داده‌های حیاتی را برای مدیریت ریسک در حکمرانی شهری فراهم می‌آورد (Merton, 1976; Hull, 2022). از آنجا که نوسانات قیمت در بورس، به‌ویژه در بخش انرژی و فناوری، بازتاب‌دهنده شوک‌های واقعی در اقتصاد شهری است، استفاده از مدل‌های پیشرفته قیمت‌گذاری مشتقه در بورس، مدیران شهری را قادر می‌سازد تا نسبت به نوسانات غیرمنتظره واکنش نشان داده و پایداری مالی سیستم‌های شهری را در برابر تلاطم‌های ناگهانی بازار محافظت کنند. با این وجود، پیوند تحلیلی میان سازوکارهای ارزش‌گذاری بازار سرمایه و تاب‌آوری پروژه‌های شهری تا کنون در بستر پژوهشی به طور شفاف تبیین نشده است؛ موضوعی که تصمیم‌گیران را در مواجهه با نوسانات بازار بورس و تطبیق آن با دارایی‌های شهری با ابهام عملیاتی مواجه کرده است.

بر این اساس، پژوهش حاضر به بررسی ارزش اختیار معامله اروپایی رنگین‌کمانی دو سهامه تحت مدل پخش-پرش مرتون می‌پردازد. انتخاب این مدل از آن جهت حائز اهمیت است که در کنار ساده‌سازی نسبی ساختار تحلیلی، توانایی انعکاس پرش‌های قیمتی و رفتارهای غیرعادی بازار را نیز دارد (Cont & Tankov, 2004; Merton, 1976). از سوی دیگر، تمرکز بر اختیار رنگین‌کمانی دو سهامه، امکان تحلیل هم‌زمان اثر دو دارایی را فراهم می‌کند که این موضوع در محیط‌های چندمنبعی و چندشاخصی، مشابه بسیاری از سازوکارهای تصمیم‌گیری در شهر هوشمند، اهمیت فراوان دارد (Stulz, 1982). انتظار می‌رود نتایج این پژوهش علاوه بر غنای ادبیات نظری در حوزه قیمت‌گذاری مشتقات مالی، بتواند از منظر کاربردی نیز در طراحی ابزارهای پوشش ریسک، تحلیل سرمایه‌گذاری‌های شهری، و تقویت بنیان‌های مالی حکمرانی هوشمند مورد استفاده قرار گیرد. در نهایت، این مطالعه تلاش دارد با معرفی یک چارچوب ریاضی منسجم، حلقه مفقوده میان ریاضیات مالی پیچیده و نیازهای تصمیم‌گیری عملی در مدیریت هوشمند شهری را برطرف سازد تا گامی رو به جلو در جهت ارتقای تاب‌آوری مالی کلان‌شهرها برداشته شود.

مرور ادبیات

در ادبیات مالی معاصر، مدل بلک-شولز به‌عنوان یکی از مهم‌ترین بنیان‌های نظری در قیمت‌گذاری اوراق مشتقه شناخته می‌شود و سال‌ها مبنای تحلیل ریسک و ارزش‌گذاری دارایی‌ها بوده است. منطق اصلی این مدل بر این فرض استوار است که قیمت دارایی‌ها در طول زمان



به صورت پیوسته تغییر می کنند و بازده ها از الگوی نوسان پذیری ثابت و توزیع نرمال تبعیت می کنند. در قالب معادله دیفرانسیل تصادفی، این منطق به صورت زیر بیان می شود:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

که در آن، dW_t نماینده حرکت براونی و بیانگر نوسانات پیوسته بازار است. با وجود کارایی بالای این چارچوب در شرایط نسبتاً ثبات، انکای کامل به آن در محیط هایی که با عدم قطعیت های ساختاری، شوک های ناگهانی و تغییرات گسسته مواجه اند، محدودیت های جدی ایجاد می کند. در حوزه حکمرانی هوشمند شهری، این محدودیت ها برجسته تر می شوند؛ زیرا تصمیمات و تحولات شهری غالباً تابع داده های لحظه ای، بحران های زیرساختی، تغییرات سیاستی، اختلالات فناورانه و نوسانات شدید تقاضا هستند. در چنین فضایی، فرض پیوستگی مسیر قیمت که شالوده مدل بلک-شولز است، توان توضیح بسیاری از جهش های واقعی را ندارد.

مسئله اصلی در مدل بلک-شولز، نادیده گرفتن «پرش ها» یا تغییرات ناگهانی در قیمت دارایی است. این مدل، نوسانات را صرفاً به صورت تغییرات تدریجی و هموار فرض می کند؛ در حالی که در اقتصاد شهری، رخدادهایی مانند قطع ناگهانی خدمات هوشمند، بحران های انرژی، اختلال در شبکه داده یا تصمیم های غیرمنتظره تنظیم گر می توانند ارزش دارایی را در زمانی کوتاه به طور چشمگیر جابه جا کنند. به همین دلیل، مدل بلک-شولز در مواجهه با داده های تجربی، به ویژه در شرایطی که توزیع بازده ها دارای دم های ضخیم است، تمایل به دست کم گرفتن ریسک های واقعی دارد. این ضعف، خود را در خطای قیمت گذاری اختیار معامله و ناتوانی در بازنمایی دقیق رفتار بازار نشان می دهد. از این منظر، مدل مرتون (Jump-Diffusion) پاسخی دقیق تر و واقع بینانه تر به کاستی های مدل بلک-شولز ارائه می دهد. مرتون با افزودن یک مؤلفه پرشی به فرآیند تصادفی قیمت، امکان وقوع تغییرات ناگهانی و غیر پیوسته را در مسیر دارایی وارد مدل می کند:

$$dS_t = (\mu - \lambda k) S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t dJ_t$$

در این معادله، dJ_t نشان دهنده جزء پرشی یا فرآیند پواسونی مرکب است که شدت وقوع آن با λ مشخص می شود. این اصلاح نظری، صرفاً یک پیچیدگی ریاضی نیست، بلکه پاسخی به رفتار واقعی بازارهایی است که در معرض شوک های ناگهانی قرار دارند. در واقع، مدل مرتون به جای آنکه همه تغییرات را در قالب نوسانات پیوسته توضیح دهد، میان نوسانات عادی و جهش های ساختاری تمایز می گذارد. همین تمایز، برای تحلیل اقتصاد شهری و حکمرانی هوشمند اهمیت ویژه دارد؛ زیرا در این حوزه، تغییرات قیمتی یا هزینه ای غالباً حاصل ترکیب دو نیرو هستند: نوسانات روزمره و شوک های گسسته.

بررسی عوامل مؤثر بر قیمت اختیار معامله نیز این برتری را تقویت می کند. در این خصوص، متغیرهایی مانند قیمت دارایی پایه، نرخ بهره، زمان تا سررسید و نوسان پذیری نقش اصلی را در تعیین ارزش اختیار دارند. اما در چارچوب مرتون، نوسان پذیری تنها یک پارامتر یکنواخت نیست، بلکه بخشی از آن از نوسانات پیوسته ناشی می شود و بخشی دیگر از پرش های ناگهانی. همین ویژگی سبب می شود که قیمت اختیار در



محیط‌های پرریسک، حق بیمه بیشتری را منعکس کند. به بیان دیگر، مدل مرتون حساسیت بیشتری نسبت به ریسک‌های پنهان و شوک‌های انفجاری دارد؛ موضوعی که در حکمرانی هوشمند شهری کاملاً معنادار است.

از سوی دیگر، یکی از شواهد تجربی مهم علیه مدل‌های کلاسیک، پدیده «لبخند نوسان‌پذیری» است. در بازار واقعی، قیمت اختیارهای خارج از سود معمولاً با پیش‌بینی‌های مدل بلک-شولز سازگار نیست و همین امر نشان می‌دهد که فرض نوسان‌پذیری ثابت و پیوستگی قیمت، تصویری ناقص از واقعیت ارائه می‌دهد. مدل مرتون با وارد کردن مؤلفه پرش، بخش مهمی از این ناهمخوانی را توضیح می‌دهد و لذا منطق ریاضی قابل‌دفاع‌تری برای قیمت‌گذاری در شرایط ناپایدار فراهم می‌سازد. این نکته به‌ویژه در اقتصاد شهری مهم است، زیرا ارزش‌گذاری دارایی‌ها و ابزارهای مالی مرتبط با زیرساخت‌های شهری نمی‌تواند صرفاً بر پایه تغییرات ملایم و تدریجی انجام شود.

در نتیجه، گذار از مدل بلک-شولز به مدل مرتون را باید نه‌فقط یک ارتقای تکنیکی، بلکه یک انتخاب نظری متناسب با واقعیت‌های اقتصاد شهری دانست. اگر بلک-شولز بازنمایی‌کننده جهانی با نوسانات هموار و قابل‌پیش‌بینی است، مرتون جهانی را مدل می‌کند که در آن شوک‌ها، اختلال‌ها و جهش‌های ناگهانی بخشی جدایی‌ناپذیر از سازوکار قیمت‌گذاری‌اند. از این رو، در این پژوهش مدل مرتون به‌عنوان چارچوب نظری مناسب‌تر برگزیده می‌شود؛ زیرا با ماهیت گسسته، پرابهام و پرریسک تحولات در حکمرانی هوشمند سازگاری بیشتری دارد و امکان تحلیل دقیق‌تری از ریسک و ارزش در بستر اقتصاد شهری فراهم می‌آورد.

مدل‌سازی ریاضی برای دارایی‌های شهری

برای تحلیل و ارزش‌گذاری پروژه‌های شهری که دارای دو مؤلفه‌ی دارایی یا زیرساخت هم‌بسته هستند، از چارچوب نظری قیمت‌گذاری اختیار معامله بر روی دارایی‌های دوگانه استفاده می‌کنیم. در این رویکرد، ارزش هر دارایی شهری (مانند شاخص‌های فناوری یا زیرساخت) با نمادهای $S_1(t)$ و $S_2(t)$ نشان داده شده و فرض می‌شود که این دارایی‌ها از فرایند هندسی براونی (GBM) تحت اندازه‌ی ریسک‌خنثی $\mathbb{Q}$ پیروی می‌کنند:

$$dS_i(t) = (r - q_i)S_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dW_i(t), \quad i = 1, 2$$

که در آن r نرخ بهره بدون ریسک، q_i بازده استمراری، σ_i نوسان‌پذیری دارایی و $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$ معرف ساختار هم‌بستگی میان دو دارایی است. هدف، محاسبه ارزش فعلی قراردادی است که پرداخت نهایی آن تابعی از هر دو دارایی، یعنی $\Phi(S_1(T), S_2(T))$ ، در زمان سررسید T باشد. ارزش این قرارداد از طریق معادله اصلی زیر در فرم شبه‌بسته (Closed-form) بیان می‌شود:

$$V(0) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Phi(S_1(T), S_2(T))]$$

در پروژه‌های زیرساختی که پرداخت آن‌ها بر مبنای عملکرد کمینه‌ی دو شاخص (مثلاً پایین‌ترین سطح کیفیت خدمات در دو حوزه متفاوت) تعریف می‌شود، یعنی $\Phi = (K - \min\{S_1(T), S_2(T)\})^+$ ، ارزش اختیار از طریق توزیع نرمال دومتغیره $\mathcal{N}_2$ با پارامتر هم‌بستگی ρ به دست می‌آید:



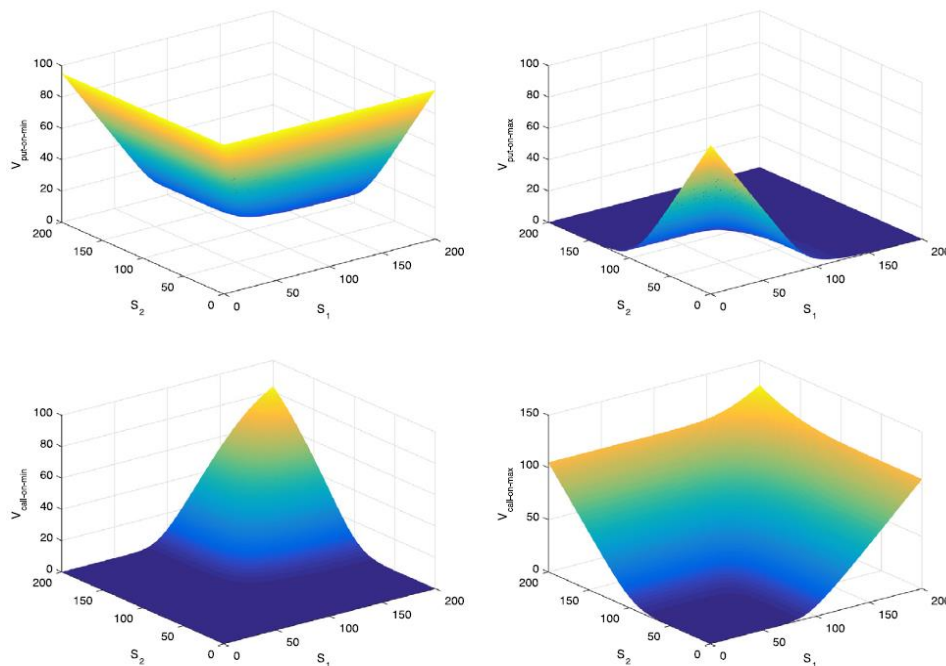
$$V_{min} = \sum_{i=1}^2 S_i e^{-q_i T} \mathcal{N}_2(-, d_1^{(i)}, \hat{d}_2^{(i)} \hat{\rho}_i) - K e^{-rT} \mathcal{N}_2(-, d_1^{(1)}, -d_1^{(2)} \rho)$$

در این رابطه، ضرایب $d_1^{(i)}$ و $d_2^{(i)}$ مطابق با استانداردهای قیمت‌گذاری بلک-شولز محاسبه شده و پارامتر $\hat{\rho}_i$ نشان‌دهنده هم‌بستگی تعدیل‌شده نوسانات دارایی‌هاست. این فرمول‌بندی نشان می‌دهد که تعامل بین دو دارایی، فراتر از مجموع ساده‌ی آن‌هاست؛ به‌طوری که هرچه هم‌بستگی (ρ) افزایش یابد، ریسک مشترک سیستمیک افزایش یافته و بر ارزش نهایی پروژه اثر می‌گذارد.

مطابق با قضایای ارائه‌شده (مانند قضیه Cheang)، نتایج نظری این مدل را می‌توان در سه محور خلاصه کرد: نخست، ارزش اختیار وابسته به کمینه، تابعی اکیداً نزولی نسبت به نوسان‌پذیری و به‌شدت حساس به هم‌بستگی است. دوم، فرم شبه‌بسته‌ی به‌دست‌آمده، امکان تحلیل دقیق ریسک را بدون نیاز به شبیه‌سازی‌های عددی پیچیده فراهم می‌کند. و سوم، استفاده از این مدل در مقایسه با مدل‌های تک‌متغیره، خطای پیش‌بینی ارزش را در پروژه‌های پیچیده‌ی شهری به‌طور قابل‌توجهی کاهش می‌دهد. در نهایت، این چارچوب تحلیلی به مدیران شهری اجازه می‌دهد تا دارایی‌ها را به عنوان یک سامانه‌ی یکپارچه و وابسته ارزیابی کنند؛ چرا که با استفاده از این رویکرد تحلیلی، ما قادریم ریسک ترکیب‌بندی پروژه‌های زیرساختی را قیمت‌گذاری کنیم.

نتایج عددی و تحلیل حساسیت

در شکل ۱، سطوح ارزش اختیار معامله برای چهار نوع اختیار مختلف، با مجموعه پارامتر ارائه شده در جدول ۱ که توسط کلیفت و فورسیت (۲۰۰۸) پیشنهاد شد، بر روی دامنه قیمت دارایی $[0, 2K] \times [0, 2K]$ نشان داده شده است.



شکل ۱. سطوح ارزش اختیار معامله برای قرارداد اختیار معامله اروپایی فروش و خرید بر روی مینیمم و ماکزیمم دو دارایی برای پارامترهای مجموعه ۱

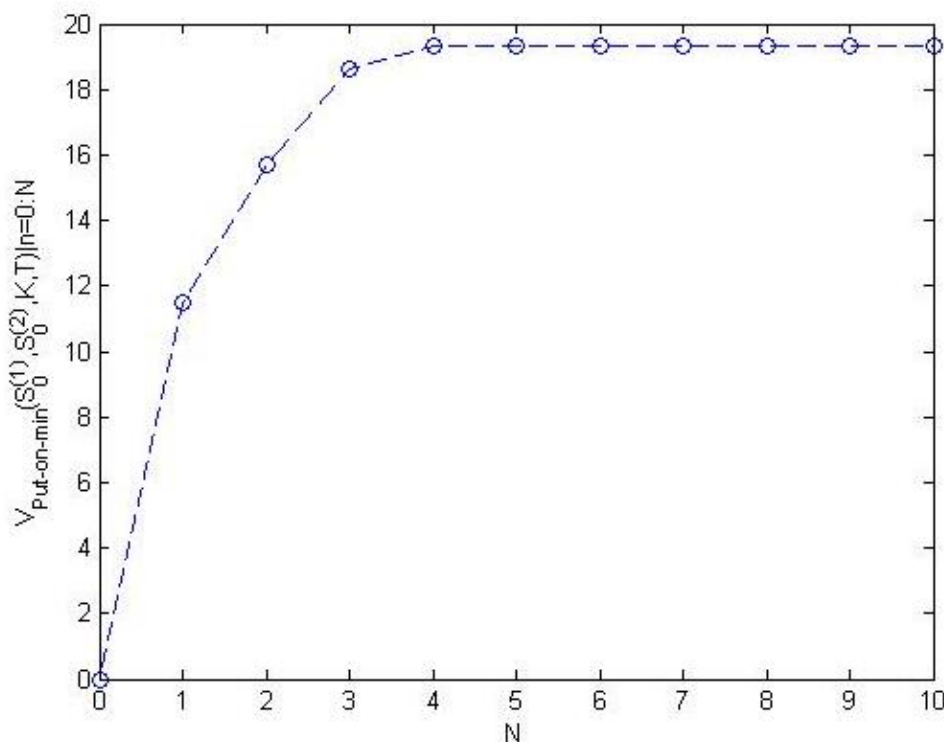


جدول ۱. مجموعه پارامترها

T	K	r	δ_2	δ_1	ρ	γ_2	γ_1	λ	ρ	σ_2	σ_1	
۱	۱۰۰	۰/۰۵	۰/۱۳	۰/۱۷	- ۰/۲۰	۰/۱۰	- ۰/۱۰	۰/۶۰	۰/۳۰	۰/۱۵	۰/۱۲	مجموعه ۱
۱	۴۰	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۴۵	۰/۵۰	- ۰/۲	- ۰/۰۵	۸	۰/۷۰	۰/۳۰	۰/۲۰	مجموعه ۲

به منظور پیاده‌سازی فرمول‌ها در قضیه ۲ و ۳، و همچنین فرمول‌های پارامترهای حسایت ریسک یا یونانی‌ها، مجموع نامتناهی به صورت $n = N$ که N عدد مثبت به اندازه کافی بزرگ می‌باشد. بسته به اندازه λT ، مقدار N باید به اندازه کافی بزرگ باشد به طوری که مجموع متناهی دقت معینی داشته باشد.

شکل ۲ همگرایی فرمول را برای افزایش N برای اختیار اروپایی تحت مجموعه پارامتر ۱ برای $S_0^{(1)} = 100, S_0^{(2)} = 100$ نشان می‌دهد.

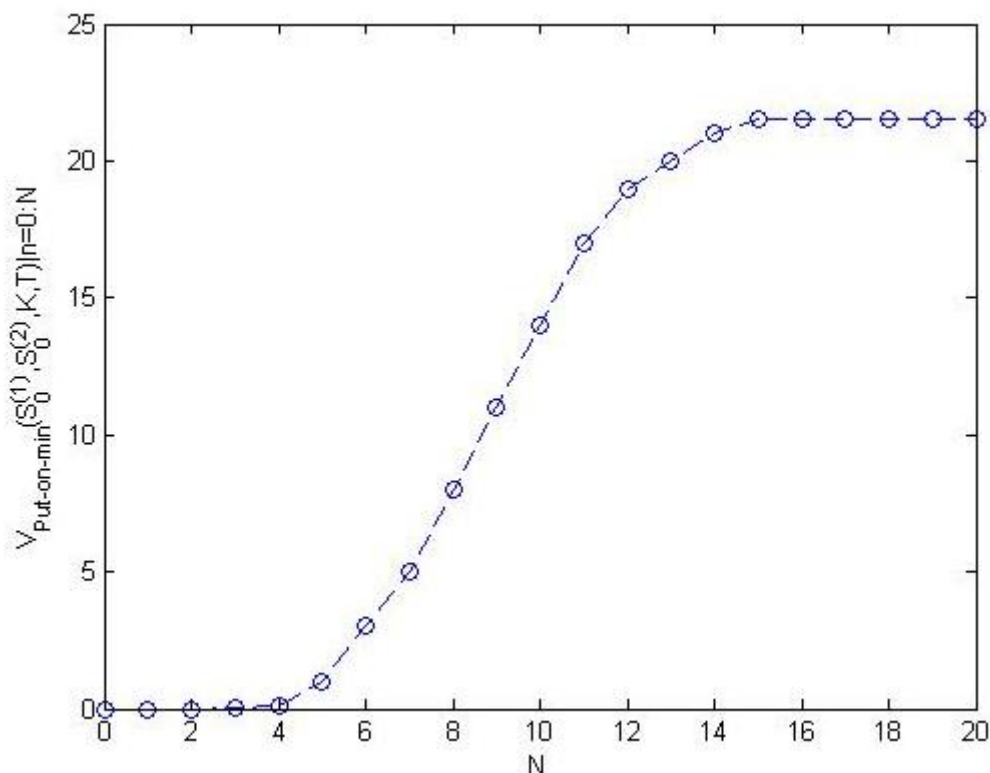


شکل ۲. همگرایی فرمول را برای افزایش N برای اختیار اروپایی تحت مجموعه پارامتر ۱ برای $S_0^{(1)} = 100, S_0^{(2)} = 100$

قرار دادن $N = 10$ که به اندازه کافی بزرگ است تضمین کننده تقریب دقیق ارزش اختیار معامله می‌باشد. کافی است. برای مجموعه پارامتر دوم در جدول ۱، (معرفی شده در مرجع [۱])، λT به طور قابل توجهی بزرگتر از مجموعه پارامتر اول است.



در این حالت، در نظر گرفتن $N = 10$ به تقریب نادرست مقادیر ارزش اختیار معامله منجر می شود، همانطور که در شکل ۳ مشخص است که مجموع تنها در حدود $N = 18$ شروع به همگرایی می کند. از این رو توصیه می گردد که در حذف دنباله مجموع با اندیس بی نهایت، از یک معیار توقف استفاده شود، جایی که دقت مورد نیاز توسط کاربر مشخص می شود.



شکل ۳. همگرایی مجموع فرمول (۳-۶) را برای افزایش حد بالای N ، نامگذاری با $V(S_0^{(1)}, S_0^{(2)}, K, T) |_{n=0}^N$ تحت مجموعه پارامتر ۱ جدول برای $S_0^{(1)} = 40, S_0^{(2)} = 32$

جدول ۲. ارزش اختیار معامله فروش در کمترین تحت پارامترهای مجموعه ۱. N نشاندهنده تعداد جملاتی است که از مجموع متناهی به منظور دستیابی به دقت مورد نیاز 10^{-3} در نظر گرفته می شود

مجموعه ۱			
$S_0^{(1)} = 110$	$S_0^{(1)} = 100$	$S_0^{(1)} = 90$	
۱۲/۱۳۱	۱۳/۴۰۷	۱۵/۶۹۲	$S_0^{(2)} = 90$
۹/۵۱۷	۹/۱۳۶	۱۲/۱۹۲	$S_0^{(2)} = 100$
	۶/۷۲۷	۱۰/۳۸۵	$S_0^{(2)} = 110$
N=8			
مجموعه ۲			
$S_0^{(1)} = 44$	$S_0^{(1)} = 40$	$S_0^{(1)} = 36$	
۲۱/۱۷۴۰	۲۲/۳۳۹	۲۳/۰۱۰	$S_0^{(2)} = 36$
۲۱/۰۲۴	۲۱/۶۶۹	۲۲/۳۸۹	$S_0^{(2)} = 40$
۲۰/۴۱۵	۲۱/۱۰۰	۲۱/۸۶۴	$S_0^{(2)} = 44$
N=23			



جدول ۲ مقادیر ارزش اختیار معامله را برای اختیار معامله اروپایی فروش در کمترین در همسایگی توافق K تحت هر دو مجموعه پارامتر نشان می دهد. با دقت مورد نیاز 10^{-3} ، برای اولین مجموعه پارامتر به $N = 8$ و برای مجموعه پارامتر دوم به $N = 23$ نیاز است. هنگام افزایش دقت مورد نیاز به 10^{-4} ، تعداد جملات لازم، فقط اندکی افزایش می یابد، به عبارتی از ۸ به ۹ برای مجموعه پارامتر اول و از ۲۳ به ۲۵ برای دومین مجموعه کفایت می کند. بنابراین، محاسبه ارزش اختیار معامله با فرمول های ارائه شده را می توان تنها با مقدار محدودی کار محاسباتی با دقت مناسب انجام داد. به منظور تکمیل مبحث، نتایج با نتایج یا تکنیک های شناخته شده در جدول مقایسه شده است.

جدول ۳. ارزش اختیار معامله فروش در کمترین تحت پارامترهای مجموعه ۱. N محاسبه شده در منبع (Clift & Forsyth, 2008)

مجموعه ۱			
$S_0^{(1)} = 110$	$S_0^{(1)} = 100$	$S_0^{(1)} = 90$	
۱۲/۱۲۹	۱۳/۴۰۳	۱۵/۶۸۴	$S_0^{(2)} = 90$
۷/۵۱۵	۹/۱۳۱	۱۲/۱۸۵	$S_0^{(2)} = 100$
۴/۸۳۰	۶/۷۲۱	۱۰/۳۷۹	$S_0^{(2)} = 110$
$N=8$			

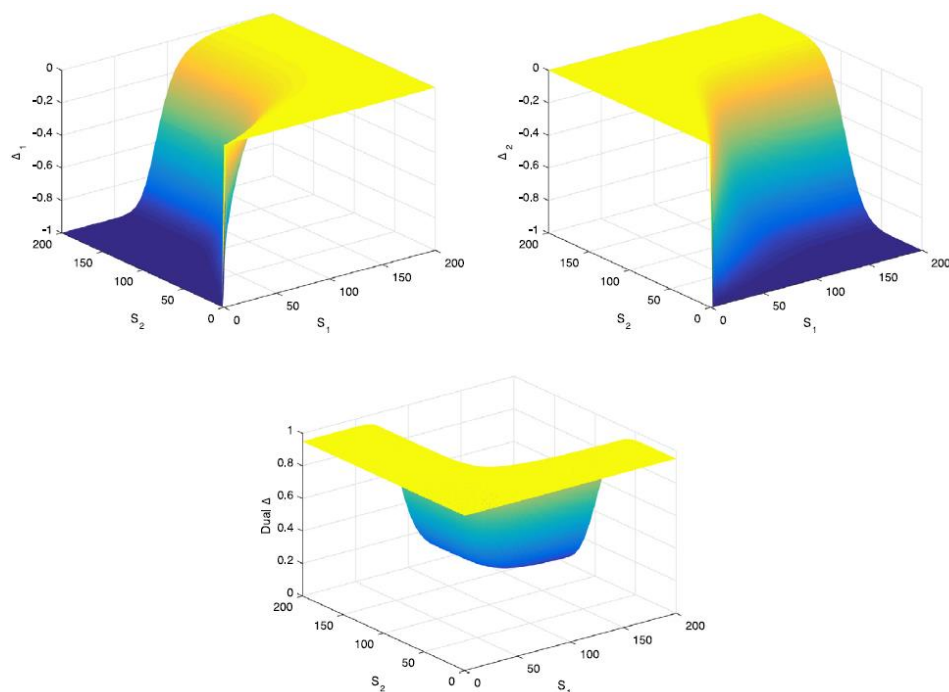
به این ترتیب، نتایج مجموعه پارامتر اول با نتایج گزارش شده در منبع [۱۸] مقایسه و در جدول ۳ نشان داده شده است، که با حل یک PIDE با استفاده از تفاضلات متناهی و یک طرح زمان بندی تکرار نقطه ثابت کرانک-نیکلسون به دست آمده اند. در هر طول گام زمانی، بخش همرفت-انتشار-واکنش PIDE به طور ضمنی برخورد می شود و بخش انتگرالی به روش تکراری مدیریت می شود که از حل یک سیستم با ماتریس بزرگ و متراکم اجتناب گردد. به منظور داشتن نتایج دقیق، باید یک شبکه مکانی و زمانی مناسب انتخاب شود. بنابراین، این فرایند نیاز به کار محاسباتی بیشتری نسبت به فرمول های مشتق شده در بالا دارد. با مقایسه مقادیر جداول ۲ و ۳ در مورد مجموعه ۱، مشاهده می شود که آنها نزدیک هستند. یکی دیگر از تکنیک های پرکاربرد شبیه سازی مونت کارلو است. مقادیر اختیار معامله فروش در کمترین با استفاده از 10^6 مسیر شبیه سازی شده در هر دو مجموعه پارامتر ۱ و ۲ به دست آمده است، که این حالت در جدول ۴ نشان داده شده است. در واقع، این مقادیر بسیار نزدیک به مقادیر به دست آمده با استفاده از فرمول (۳.۶) می باشند، اما نیاز به کار محاسباتی بسیار بیشتری دارند. از این رو، علاوه بر مزیت ذاتی داشتن یک راه حل فرم نیمه بسته، فرمول های مشتق شده همچنین امکان محاسبه مقادیر گزینه دقیق را با مقدار محدودی کار محاسباتی فراهم می کند و از این رو می تواند به عنوان معیاری برای تحقیقات آینده استفاده شود.

جدول ۴. ارزش اختیار معامله فروش در کمترین تحت پارامترهای مجموعه ۱ و ۲. حاصل از تخمین مونت کارلو. خطای استاندارد تخمین تقریباً ۰/۰۰۹ برای همه ارزش های اختیار معامله تحت پارامترهای مجموعه ۱ و ۰/۰۱۱ برای همه ارزش های اختیار معامله تحت پارامترهای مجموعه ۱ می باشد.

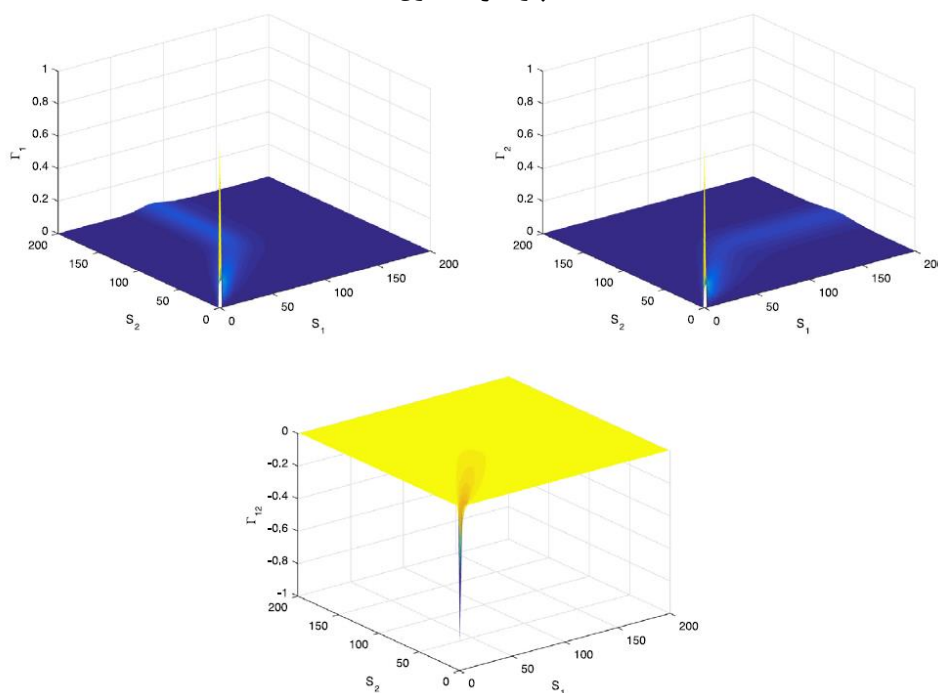
مجموعه ۱			
$S_0^{(1)} = 110$	$S_0^{(1)} = 100$	$S_0^{(1)} = 90$	
۱۲/۱۳۲	۱۳/۴۰۰	۱۵/۷۰۱	$S_0^{(2)} = 90$
۷/۵۱۹	۹/۱۳۲	۱۲/۲۲۱	$S_0^{(2)} = 100$
۴/۸۲۱	۶/۷۱۴	۱۰/۳۸۷	$S_0^{(2)} = 110$



$S_0^{(1)} = 44$	$S_0^{(1)} = 40$	$S_0^{(1)} = 36$	
۲۱/۷۵۵	۲۲/۳۳۷	۲۳/۰۲۵	$S_0^{(2)} = 36$
۲۱/۰۳۶	۲۱/۶۷۷	۲۲/۳۸۳	$S_0^{(2)} = 40$
۲۰/۴۲۱	۲۱/۰۹۴	۲۱/۸۵۱	$S_0^{(2)} = 44$



شکل ۴. یونانی‌های مرتبه اول Δ_1 (بالا سمت چپ)، Δ_2 (بالا سمت راست)، و دوگان Δ برای اختیار معامله فروش در کمترین تحت مجموعه پارامتر ۱ جدول



شکل ۵. یونانی‌های مرتبه دوم Γ_1 (بالا سمت چپ)، Γ_2 (بالا سمت راست)، و دوگان Γ_{12} برای اختیار معامله فروش در کمترین تحت مجموعه پارامتر ۱ جدول



بحث و نتیجه گیری

شهرهای امروز، به‌ویژه در بستر تحولات فناوریانه، دیگر تنها مجموعه‌ای از زیرساخت‌های فیزیکی و خدمات عمومی نیستند، بلکه به سامانه‌هایی پیچیده، پویا و به‌شدت به هم‌پیوسته تبدیل شده‌اند که در آن‌ها اطلاعات، انرژی، سرمایه و تصمیم‌گیری در زمان واقعی جریان دارد (Batty et al., 2012; Kitchen, 2014). در چنین بستری، مفهوم شهر هوشمند تنها به استفاده از فناوری‌های نوین محدود نمی‌شود، بلکه مستلزم شکل‌گیری نوعی حکمرانی هوشمند است؛ حکمرانی‌ای که بتواند عدم قطعیت‌ها را شناسایی، ریسک‌ها را مدیریت و منابع محدود شهری را به‌صورت کارآمد تخصیص دهد (Meijer & Bolívar, 2016; Nam & Pardo, 2011). از این منظر، یکی از پیش‌نیازهای حکمرانی شهر هوشمند، برخورداری از ابزارهای تحلیلی و مالی مناسب برای مواجهه با ریسک‌های پیچیده و چندبعدی است. این پژوهش با هدف قیمت‌گذاری اختیار معامله برای ۱۱ شرکت برتر بورسی با استفاده از روش تفاضلات متناهی (FDM) و تحلیل پارامترهای حساسیت (یونانی‌ها)، گامی در جهت تبیین این ابزارهای تحلیلی برداشته است. از منظر نظری، این یافته‌ها نشان می‌دهد که حکمرانی هوشمند صرفاً یک مفهوم مدیریتی یا فناوریانه نیست، بلکه به سازوکارهای دقیق قیمت‌گذاری، سنجش ریسک و پیش‌بینی‌پذیری مالی نیز وابسته است. به بیان دیگر، اگر شهر هوشمند را یک نظام پیچیده و باز در نظر بگیریم، آنگاه ابزارهایی مانند اختیار معامله و شاخص‌های حساسیت آن، نقش زبان تحلیلی این نظام را ایفا می‌کنند؛ زبانی که امکان تشخیص واکنش‌داری‌ها به تغییرات محیطی و تصمیم‌سازی مبتنی بر داده را فراهم می‌سازد. در چارچوب حکمرانی داده‌محور، اهمیت این پژوهش در آن است که نشان می‌دهد تصمیم‌گیری شهری بدون اتکا به مدل‌های کمی قابل اتکا، به سمت حدس و آزمون و خطا میل می‌کند؛ در حالی که پیچیدگی اقتصاد شهری، چنین رویکردی را به‌شدت پرهزینه و ناکارآمد می‌سازد.

یافته‌های این پژوهش نشان داد که روش تفاضلات متناهی، به دلیل پایداری و دقت بالا، تقریب مناسبی از ارزش اختیار معامله ارائه می‌دهد که با نتایج مطالعات پیشگام در زمینه روش‌های عددی برای مطالبات احتمالی و مدل‌های پرش-نفوذ، هم‌سو است (Cont & Voltchkova, 2005; d'Halluin et al., 2005). علاوه بر این، کارایی محاسباتی این روش در مواجهه با مدل‌های پیچیده، مورد تأیید پژوهشگران متعددی بوده است که برتری آن را در مقایسه با سایر روش‌های عددی اثبات کرده‌اند (Salmi & Toivanen, 2014; Clift & Forsyth, 2008). این پژوهش نشان داد که نوسان‌پذیری، نقش تعیین‌کننده‌ای در ارزش‌گذاری ایفا می‌کند؛ متغیری که در مدل‌های کلاسیک پرش-نفوذ (Merton, 1976; Kou, 2002) نیز به عنوان مؤلفه اصلی عدم قطعیت شناخته می‌شود.

اهمیت این نتیجه از آن جهت است که مدل‌های مبتنی بر نوسان ثابت یا فرض‌های ایستای کلاسیک، در مواجهه با بازارهای واقعی و چندناهمگن، توان توضیح کافی ندارند. در حالی که رفتار داریی‌های مالی در محیط‌های واقعی، به‌ویژه در شرایط تنش، بحران یا تغییرات سیاستی، اغلب با جهش و عدم پیوستگی همراه است. بنابراین، برتری مدل پخش-پرش در این پژوهش تنها یک برتری عددی نیست، بلکه نشان‌دهنده نزدیک‌تر شدن تحلیل مالی به واقعیت‌های پیچیده بازار است. از این منظر، نتایج پژوهش تایید می‌کند که مدل‌سازی مالی موفق،



باید توانایی جذب هم‌زمان دو سطح از نوسان را داشته باشد: نوسان پیوسته ناشی از تغییرات عادی بازار و نوسان جهشی ناشی از شوک‌های ساختاری. همین ویژگی است که مدل مرتون را برای محیط‌های پرتلاطم و ناپایدار، به‌ویژه در فضای دارایی‌های بورسی، به‌گزینه‌ای مناسب تبدیل می‌کند. در فضای مالی، دقت در محاسبات یونانی‌ها (مانند دلتا و وگا) به سرمایه‌گذاران اجازه می‌دهد تا در برابر نوسانات بازار از خود محافظت کنند (Tavella & Randall, 2000). این رویکرد دقیقاً با منطق حکمرانی هوشمند در شهرهای هوشمند هم‌پوشانی دارد؛ جایی که مدیریت ریسک و بهینه‌سازی منابع (مشابه مدل‌های مبادله دارایی Margrabe, 1978 و Stulz, 1982) نیازمند مدل‌های ریاضی قوی و پایداری است که بتوانند هم‌بستگی‌های پیچیده و غیرخطی را تحلیل کنند (Da Fonseca et al., 2007; Boen & in't Hout, 2021) توانایی مدل‌های عددی در تحلیل این هم‌بستگی‌ها، ابزاری راهبردی برای مدیریت دارایی‌های شهری است که با رویکردهای نوین در قیمت‌گذاری مشتقات مالی (Caldana et al., 2015; Cheang & Chiarella, 2011) قابل مقایسه است.

از منظر تحلیلی، یونانی‌ها فقط شاخص‌های فنی برای معامله‌گران نیستند، بلکه می‌توان آن‌ها را معادل «حساسیت‌سنج‌های تصمیم» در حکمرانی هوشمند دانست. همان‌گونه که دلتا نشان می‌دهد ارزش اختیار نسبت به تغییرات دارایی پایه چه واکنشی دارد، در مدیریت شهری نیز سیاست‌گذار نیاز دارد بداند یک تغییر کوچک در قیمت، تقاضا یا عدم‌قطعیت چگونه کل ساختار تصمیم را تحت تأثیر قرار می‌دهد. این همان نقطه‌ای است که تحلیل حساسیت از سطح مالی فراتر رفته و به منطق حکمرانی پیچیده پیوند می‌خورد. به بیان دیگر، اگر شهر هوشمند را شبکه‌ای از اجزای وابسته و واکنش‌پذیر بدانیم، آنگاه یونانی‌ها نقش ابزار پایش پویایی سیستم را بر عهده دارند و امکان می‌دهند که تصمیم‌گیری از حالت واکنشی به حالت پیش‌نگر و پیشگیرانه منتقل شود. از نگاه حکمرانی داده‌محور، پیشنهاد این پژوهش مبنی بر نمایش پارامترهای حساسیت ریسک در بسترهای معاملاتی، مشابه نیاز به شفافیت اطلاعاتی در پروژه‌های شهر هوشمند است. همان‌طور که استفاده از روش‌های عددی پیشرفته (Briani et al., 2007; Feng & Linetsky, 2008) به معامله‌گران قدرت تصمیم‌گیری می‌دهد، ارائه داشبوردهای هوشمند مدیریتی در شهرها نیز می‌تواند به افزایش تاب‌آوری در برابر بحران‌های زیرساختی منجر شود (Cont & Tankov, 2004; Wystup, 2017). بنابراین، روش تفاضلات متناهی نه تنها به عنوان ابزاری برای حل معادلات قیمت‌گذاری (Fahim, 2019)، بلکه به عنوان چارچوبی برای اداره هوشمند جوامع پیچیده قابل تعمیم است.

این نتیجه از منظر نظری اهمیت ویژه‌ای دارد، زیرا نشان می‌دهد شفافیت صرفاً یک ارزش اخلاقی یا مدیریتی نیست، بلکه زیرساختی برای کارایی مالی و تاب‌آوری سیستمی است. در محیطی که اطلاعات ناقص، نوسانات شدید و هم‌بستگی‌های چندگانه بر تصمیم‌ها سایه می‌افکنند، داشبوردهای تحلیلی و ابزارهای عددی پیشرفته می‌توانند فاصله میان عدم‌قطعیت و تصمیم را کاهش دهند. در واقع، همان‌گونه که شهر هوشمند برای مدیریت بهتر خدمات عمومی نیازمند داده‌های لحظه‌ای و تفسیرپذیر است، بازار سرمایه نیز برای کنترل ریسک، نیازمند نمایش دقیق و تبیین‌پذیر حساسیت‌ها و سناریوهای قیمت‌گذاری است. از این رو، خروجی این پژوهش می‌تواند به عنوان یک الگوی تحلیلی برای توسعه سامانه‌های تصمیم‌یار مالی و مدیریتی تلقی شود. در پایان، توسعه نرم‌افزارهای کمکی جهت محاسبه شاخص‌های ریسک در بازار سرمایه، نه تنها باعث ارتقای کارایی بازار می‌شود، بلکه الگوی حکمرانی هوشمند را در مدیریت کلان‌شهری نیز تقویت می‌کند. این هم‌افزایی میان



ابزارهای دقیق مالی (Laurence & Wang, 2008; Hurd & Zhou, 2010; Dempster & Hong, 2002) و ضرورت‌های مدیریتی شهر هوشمند، نشان می‌دهد که پایداری درسیستم‌های اقتصادی و شهری، مستلزم بهره‌گیری از مدل‌های عددی کارآمد (Shreve, 2004; Chambers, 2007) برای مدیریت نوسانات و عدم قطعیت‌های محیطی است.

بر این اساس، نتیجه نهایی پژوهش آن است که قیمت‌گذاری اختیار معامله، به‌ویژه در قالب اختیارهای چندارایی و تحت مدل‌های پخش-پرش، صرفاً یک مسئله فنی در ریاضیات مالی نیست، بلکه بخشی از سازوکار حکمرانی هوشمند در بستر اقتصاد شهری به شمار می‌آید. این ابزارها با تبدیل عدم قطعیت به کمیتی قابل سنجش، امکان برنامه‌ریزی دقیق‌تر، کنترل بهتر ریسک و افزایش تاب‌آوری مالی را فراهم می‌کنند. در نتیجه، می‌توان گفت هرچه محیط تصمیم‌گیری پیچیده‌تر، غیرخطی‌تر و نوسان‌پذیرتر شود، ضرورت استفاده از مدل‌های عددی پیشرفته نیز بیشتر می‌شود. پژوهش حاضر نشان داد که روش تفاضلات متناهی در کنار تحلیل یونانی‌ها، ظرفیت مناسبی برای این نوع قیمت‌گذاری دارد و می‌تواند در توسعه ابزارهای تصمیم‌یار مالی، طراحی سازوکارهای پوشش ریسک و تقویت زیرساخت تحلیلی حکمرانی هوشمند نقش مؤثری ایفا کند. در یک جمع‌بندی نهایی، این مطالعه تأکید می‌کند که پایداری مالی شهر هوشمند بدون ابزارهای دقیق قیمت‌گذاری و سنجش ریسک، قابل تحقق نیست و پیوند میان ریاضیات مالی، مدیریت ریسک و حکمرانی داده‌محور، یکی از مسیرهای اصلی ارتقای تاب‌آوری در نظام‌های اقتصادی و شهری آینده است.

تعارض منافع

درانجام مطالعه حاضر، هیچگونه تضاد منافی وجود ندارد.

تشکر و قدردانی

نگارندگان بر خود لازم می‌دانند از تمامی افرادی که به تیم پژوهش کمک کردند و نظرات ارزشمندشان را در مورد متن مقاله‌ی حاضر ارائه دادند، سپاسگزاری کنند.

مشارکت نویسندگان

در نگارش این مقاله تمامی نویسندگان نقش یکسانی ایفا کردند.

موازین اخلاقی

این پژوهش با رعایت تمامی اصول اخلاق در پژوهش‌های انسانی انجام شده است.

شفافیت داده‌ها

داده‌ها و مآخذ پژوهش حاضر در صورت درخواست از نویسنده مسئول و ضمن رعایت اصول کپی رایت ارسال خواهد شد.



این پژوهش حامی مالی نداشته است.

References

- Ait-Sahalia, Y., & Jacod, J. (2014). *High-Frequency Financial Econometrics*. Princeton University Press. DOI: [10.23943/princeton/9780691161433.001.0001](https://doi.org/10.23943/princeton/9780691161433.001.0001)
- Albino, V., Berardi, U., & Dangelico, R. M. (2015). Smart cities: Definitions, dimensions, performance, and initiatives. *Journal of Urban Technology*, 22(1), 3–21. DOI: [10.1080/10630732.2014.942092](https://doi.org/10.1080/10630732.2014.942092)
- Angelidou, M. (2015). Smart cities: A conjuncture of four forces. *Cities*, 47, 95–106. DOI: [10.1016/j.cities.2015.05.004](https://doi.org/10.1016/j.cities.2015.05.004)
- Ankudinova, J., & Ehrhardt, M. (2008). On the numerical solution of nonlinear Black–Scholes equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 56(3), 799–812. DOI: [10.1016/j.camwa.2008.02.005](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.02.005)
- Batty, M., Axhausen, K. W., Giannotti, F., et al. (2012). Smart cities of the future. *The European Physical Journal Special Topics*, 214, 481–518. DOI: [10.1140/epjst/e2012-01703-3](https://doi.org/10.1140/epjst/e2012-01703-3)
- Bibri, S. E., & Krogstie, J. (2017). Smart sustainable cities of the future: An extensive interdisciplinary literature review. *Sustainable Cities and Society*, 31, 183–212. DOI: [10.1016/j.scs.2017.02.016](https://doi.org/10.1016/j.scs.2017.02.016)
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654. DOI: [10.1086/260062](https://doi.org/10.1086/260062)
- Boen, L., & in 't Hout, K. J. (2021). Operator splitting schemes for the two-asset Merton jump–diffusion model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 387, 112309. DOI: [10.1016/j.cam.2019.06.025](https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.06.025)
- Briani, M., Natalini, R., & Russo, G. (2007). Implicit-explicit numerical schemes for jump–diffusion processes. *Calcolo*, 44, 33–57. DOI: [10.1007/s10092-007-0128-x](https://doi.org/10.1007/s10092-007-0128-x)
- Caldana, R., Cheang, G. H. L., Chiarella, C., & Fusai, G. (2015). Correction: Exchange option under jump–diffusion dynamics. *Applied Mathematical Finance*, 22(1), 99–103. DOI: [10.1080/1350486X.2014.937564](https://doi.org/10.1080/1350486X.2014.937564)
- Caragliu, A., Del Bo, C., & Nijkamp, P. (2011). Smart cities in Europe. *Journal of Urban Technology*, 18(2), 65–82. DOI: [10.1080/10630732.2011.601117](https://doi.org/10.1080/10630732.2011.601117)
- Chambers, L. (2007). Integral Equation, A short Course. *International Mathematical Forum*, 2(5), 215–220.
- Cheang, G. H. L., & Chiarella, C. (2011). Exchange options under jump–diffusion dynamics. *Applied Mathematical Finance*, 18(3), 245–276. DOI: [10.1080/1350486X.2011.552088](https://doi.org/10.1080/1350486X.2011.552088)
- Clift, S. S., & Forsyth, P. A. (2008). Numerical solution of two asset jump diffusion models for option valuation. *Applied Numerical Mathematics*, 58, 743–782. DOI: [10.1016/j.apnum.2007.02.005](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2007.02.005)
- Cong, F., & Oosterlee, C. W. (2015). Pricing bermudan options under Merton jump–diffusion asset dynamics. *International Journal of Computer Mathematics*, 92(12), 2406–2432. DOI: [10.1080/00207160.2015.1070838](https://doi.org/10.1080/00207160.2015.1070838)
- Cont, R., & Tankov, P. (2004). *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC. DOI: [10.1201/9780203485217](https://doi.org/10.1201/9780203485217)
- Cont, R., & Voltchkova, E. (2005). A finite difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential Lévy models. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43, 1596–1626. DOI: [10.1137/S0036142903436186](https://doi.org/10.1137/S0036142903436186)
- d'Halluin, Y., Forsyth, P. A., & Vetzal, K. R. (2005). Robust numerical methods for contingent claims under jump diffusion processes. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 25, 87–112. DOI: [10.1093/imanum/dri003](https://doi.org/10.1093/imanum/dri003)
- Da Fonseca, J., Grasselli, M., & Tebaldi, C. (2007). Option pricing when correlations are stochastic: an analytical framework. *Review of Derivatives Research*, 10(2), 151–180. DOI: [10.1007/s11147-007-9014-4](https://doi.org/10.1007/s11147-007-9014-4)
- Dempster, M. A. H., & Hong, S. S. G. (2002). Spread option valuation and the fast Fourier transform. In H. Geman, D. Madan, S. Pliska, & T. Vorst (Eds.), *Mathematical Finance — Bachelier Congress 2000* (pp. 203–220). Springer. DOI: [10.1007/978-3-662-12430-4_10](https://doi.org/10.1007/978-3-662-12430-4_10)
- Fahim, A. (2019). Introduction to Financial Mathematics: Concepts and Computational Methods. Florida State University. DOI: [10.33009/financialmath1](https://doi.org/10.33009/financialmath1)
- Feng, L., & Linetsky, V. (2008). Pricing options in jump–diffusion models: an extrapolation approach. *Operations Research*, 56, 304–325. DOI: [10.1287/opre.1070.0419](https://doi.org/10.1287/opre.1070.0419)
- Hull, J. C. (2022). *Options, Futures, and Other Derivatives* (11th ed.). Pearson.
- Hurd, T., & Zhou, Z. (2010). A Fourier transform method for spread option pricing. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 1(1), 142–157. DOI: [10.1137/090750421](https://doi.org/10.1137/090750421)
- Janssen, M., Matheus, R., Longo, J., & Weerakkody, V. (2017). Transparency-by-design as a foundation for open government. *Transforming Government: People, Process and Policy*, 11(1), 2–8. DOI: [10.1108/TG-02-2017-0015](https://doi.org/10.1108/TG-02-2017-0015)
- Jiang, H., Geertman, S. C. M., & Witte, P. A. (2022). Smart urban governance: An alternative to technocratic "smartness". *GeoJournal*, 87(3), 1639–1655. DOI: [10.1007/s10708-020-10326-w](https://doi.org/10.1007/s10708-020-10326-w)
- Johnson, H. (1987). Options on the maximum or the minimum of several assets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(3), 227–234. DOI: [10.2307/2331002](https://doi.org/10.2307/2331002)



- Kitchin, R. (2014). The real-time city? Big data and smart urbanism. *GeoJournal*, 79(1), 1–14. DOI: 10.1007/s10708-013-9516-8
- Kou, S. G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*, 48(8), 1086–1101. DOI: 10.1287/mnsc.48.8.1086.166
- Laurence, P., & Wang, T. (2008). Distribution-free upper bounds for spread options and market-implied antimonotonicity gap. *European Journal of Finance*, 14(8), 717–734. DOI: 10.1080/13518470701705782
- Margrabe, W. (1978). The value of an option to exchange one asset for another. *Journal of Finance*, 33(1), 177–186. DOI: 10.2307/2326358
- Meijer, A., & Bolívar, M. P. R. (2016). Governing the smart city: A review of the literature on smart urban governance. *International Review of Administrative Sciences*, 82(2), 392–408. DOI: 10.1177/0020852314564308
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1), 125–144. DOI: 10.1016/0304-405X(76)90022-2
- Nam, T., & Pardo, T. A. (2011). Conceptualizing smart city with dimensions of technology, people, and institutions. *Proceedings of the 12th Annual International Digital Government Research Conference*, 282–291. DOI: 10.1145/2037556.2037602
- OECD. (2019). *Global Smart Cities and Inclusive Growth: Building on the Success of Smart Cities*. OECD Publishing.
- Rubinstein, M. (1991). Some wherewithal for the null hypothesis in option pricing. *The Journal of Finance*, 46(1), 223–235. DOI: 10.1016/j.apnum.2014.05.007
- Rubinstein, M. (1991). Somewhere over the rainbow. *Risk*, 4(10), 63–66.
- Salmi, S., & Toivanen, J. (2014). IMEX Schemes for pricing options under jump-diffusion models. *Applied Numerical Mathematics*, 84, 33–45. DOI: 10.1016/j.apnum.2014.05.007
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer. DOI: 10.1007/978-0-387-22527-9
- Stulz, R. M. (1982). Options on the minimum or the maximum of two risky assets. *Journal of Financial Economics*, 10(2), 161–185. DOI: 10.1016/0304-405X(82)90029-9
- Tavella, D., & Randall, C. (2000). *Pricing Financial Instruments*. Wiley. DOI: 10.1002/9781118267935
- Wystup, U. (2017). *FX Options and Structured Products*. Wiley. DOI: 10.1002/9781118673423



Valuation of European Two-Asset Rainbow Options under the Merton Jump-Diffusion Model

Extended Abstract

Introduction

This study investigates the valuation of European two-asset rainbow options under the Merton jump-diffusion model, with particular emphasis on the relevance of such pricing frameworks for complex urban and financial systems. Rainbow options are a class of multi-asset derivatives whose payoff depends on the minimum or maximum of two underlying assets. Because their value is linked to the joint behavior of correlated assets, they are more difficult to price than standard single-asset European options. In modern financial environments, especially those associated with smart-city investments and interconnected urban infrastructures, risk is shaped not only by continuous market fluctuations but also by abrupt shocks, structural uncertainty, and nonlinear interdependence among asset values. The paper addresses this challenge by proposing a valuation framework that incorporates both diffusion risk and jump risk, thereby offering a more realistic representation of asset-price dynamics in uncertain environments.

Literature Review and Theoretical Framework

The theoretical foundation of the study is based on the evolution of option pricing theory from classical continuous-time models toward more flexible jump-based models. Traditional approaches such as the Black-Scholes framework assume that asset prices evolve continuously and that sudden discontinuities do not occur. Although these assumptions simplify valuation, they often fail to capture real market behavior, especially during crises, policy shifts, technological disruptions, or sharp macroeconomic adjustments. Prior studies in financial mathematics have shown that exotic options, particularly rainbow options, require more advanced pricing structures because their payoffs depend on several underlying risk factors simultaneously. The Merton jump-diffusion model extends the standard diffusion setting by allowing random jumps in asset prices through a Poisson process combined with normally distributed jump sizes. This framework is especially appropriate for modeling markets exposed to rare but influential shocks. Within the context of urban and infrastructure-related financial decision-making, the paper positions rainbow options as useful analytical instruments for measuring multidimensional exposure and designing more adaptive risk-management strategies.

Mathematical Modeling for Urban Assets

The paper develops a mathematical valuation model for European call and put options written on the minimum and maximum of two correlated assets under the Merton jump-diffusion process. Each asset is modeled through a stochastic differential equation that includes both a continuous diffusion component and a discontinuous jump component. Correlation between the two assets is explicitly incorporated because the joint dependence structure plays a central role in determining the payoff of rainbow options. Based on this framework, the authors derive semi-closed-form pricing formulas for the four principal contracts: call on the minimum, put on the minimum, call on the maximum, and put on the maximum.

A key feature of the resulting formulas is the presence of an infinite series generated by the jump structure of the Merton model. Since this series cannot be evaluated directly in practical implementations, a truncation parameter is introduced to approximate the option value with finite computation. The paper carefully studies the role of this truncation level and shows that its adequacy depends on the product of jump intensity and time to maturity. To support numerical implementation and model verification, the theoretical formulas are complemented by finite difference methods and Monte Carlo simulation. The model is therefore both analytically grounded and computationally testable, which increases its usefulness for applications involving complex urban financial assets and correlated investment structures.



Numerical Results and Sensitivity Analysis

The numerical analysis demonstrates that the proposed pricing formulas perform well across different market parameter settings. Using benchmark parameter sets drawn from previous studies, the paper evaluates the option values for the minimum- and maximum-based contracts and compares the outcomes with numerical approximations. The results show that convergence of the truncated infinite series is highly sensitive to the value of the parameter product λT . For smaller values, a relatively low truncation level is sufficient to achieve accurate estimates. However, for larger values of jump intensity or maturity, a substantially higher number of terms is required. This finding is important because it shows that the accuracy of rainbow option pricing under jump-diffusion dynamics cannot rely on a fixed computational cutoff.

The sensitivity analysis further reveals that option values are strongly affected by volatility, asset correlation, and jump intensity. Volatility plays a major role because it influences the dispersion of possible future asset values. Correlation is especially important for rainbow options, since the payoff depends on the relative joint movement of the two underlying assets. A higher or lower correlation can significantly alter the likelihood that the minimum or maximum asset reaches favorable payoff regions. Jump intensity is another decisive variable, as more frequent jumps increase the probability of extreme outcomes and reshape the distribution of future prices. The paper also examines the Greeks, including first- and second-order sensitivities, in order to quantify the response of option values to changes in underlying market inputs. These results confirm that the jump-diffusion framework captures dimensions of risk that continuous models may underestimate or ignore.

Discussion and Conclusion

The findings of the study indicate that the valuation of European two-asset rainbow options under the Merton jump-diffusion model provides a robust and realistic framework for pricing multi-asset derivatives in environments characterized by uncertainty and sudden shocks. From a mathematical perspective, the paper contributes by deriving semi-closed-form solutions and clarifying the convergence behavior of the associated infinite series. From an applied perspective, it shows that advanced pricing techniques can support better risk measurement and decision-making in complex systems such as urban infrastructure portfolios, smart-city financial planning, and interconnected investment environments.

The discussion emphasizes that modern cities and their financial structures are increasingly exposed to multiple layers of uncertainty, including market volatility, technological disruption, and systemic shocks. In such settings, relying solely on continuous pricing models may lead to incomplete valuation and weak risk assessment. By incorporating jumps, the Merton model offers a richer and more realistic description of financial dynamics. The combination of analytical formulas, finite difference implementation, Monte Carlo validation, and Greek-based sensitivity analysis makes the proposed framework valuable for both researchers and practitioners. Overall, the study concludes that nonlinear and shock-sensitive pricing models are essential for understanding multidimensional financial exposure and for improving resilience in data-driven and economically complex urban systems.

Keywords: Rainbow Option, Merton Jump-Diffusion Model, Smart City Governance, Finite Difference Method, Risk Management, Multi-Asset Derivatives.

Conflict of Interest

The authors declare that there is no conflict of interest regarding the publication of this study.

Acknowledgment

The authors would like to express their sincere gratitude to all individuals who assisted the research team and provided valuable feedback on the manuscript of this article.



Author Contributions

All authors contributed equally to the preparation of this manuscript.

Ethical Considerations

This study was conducted in accordance with all ethical principles for human research.

Data Transparency

The data and references supporting the findings of this study are available from the corresponding author upon reasonable request, provided that copyright and privacy policies are respected.

Funding

This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

